

大学入試改革—プレテスト踏まえた授業案

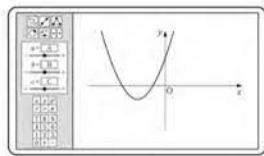
数学I・数学A 二次関数、グラフ表示ソフトで理解

プレテスト問題(一部掲載)

第1問(必答問題)

(1) 数学の授業で、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ についてコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて考察している。

このソフトでは、図1の画面上の[A]、[B]、[C]にそれぞれ係数 a 、 b 、 c の値を入力すると、その値に応じたグラフが表示される。さらに、[A]、[B]、[C] それぞれの下にある+を左に動かすと係数の値が減少し、右に動かすと係数の値が増加するようにになっており、値の変化に応じて2次関数のグラフが座標平面上を動く仕組みになっている。



また、座標平面は x 軸、 y 軸によって四つの部分に分けられる。これらの各部分を「象限」といい、右の図のように、それぞれを「第1象限」「第2象限」「第3象限」「第4象限」という。ただし、座標軸上の点は、どの象限にも属さないものとする。

このとき、次の問いに答えよ。

| | |
|---------|---------|
| 第2象限 | 第1象限 |
| $x < 0$ | $x > 0$ |
| $y > 0$ | $y > 0$ |
| 第3象限 | 第4象限 |
| $x < 0$ | $x > 0$ |
| $y < 0$ | $y < 0$ |

(2) 次に、図1の画面の上で、頂点が第3象限にあるグラフが表示された。このときの a 、 b 、 c の値の組合せとして最も適当なものを、次の㉑～㉓のうちから一つ選べ。

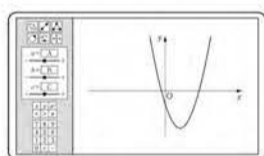
| | | | |
|---|----------------|----|----|
| ㉑ | 2 | 1 | 3 |
| ㉒ | 2 | -1 | 3 |
| ㉓ | -2 | 3 | -3 |
| ㉔ | $\frac{1}{2}$ | 3 | 3 |
| ㉕ | $\frac{1}{2}$ | -3 | 3 |
| ㉖ | $-\frac{1}{2}$ | 3 | -3 |

(3) 次に、 a 、 b 、 c の値を(1)の値のまま変えずに、 c の値だけを変化させた。このときの頂点の移動について正しく述べたものを、次の㉗～㉙のうちから一つ選べ。

- ㉗ 最初の位置から移動しない。
 - ㉘ x 軸方向に移動する。
 - ㉙ y 軸方向に移動する。
 - ㉚ 原点を中心として回転移動する。
- (4) また、 a 、 b 、 c の値を(1)の値のまま変えずに、 a の値だけをグラフが下に凸の状態を維持するように変化した。このとき、頂点は、 $a = \frac{b}{c}$ のときは [ウ] にあり、それ以外の場合は [エ] を移動した。[ウ]、[エ] に当てはまるものを、次の㉛～㉝のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでよい。
- ㉛ 原点
 - ㉜ x 軸上
 - ㉝ y 軸上
 - ㉞ 第3象限のみ
 - ㉟ 第1象限と第3象限
 - ㊱ 第2象限と第3象限
 - ㊲ 第3象限と第4象限
 - ㊳ 第2象限と第3象限と第4象限
 - ㊴ すべての象限

(5) 最初の a 、 b 、 c の値を変更して、下の図2のようなグラフを表示させた。このとき、 a 、 b 、 c の値をこのまま変えずに、 b の値だけを変化させても、頂点は第1象限および第2象限には移動しなかった。

その理由を、頂点の x 座標についての不等式を用いて説明せよ。解答は、解答欄 [カ] に記述せよ。



判別式を多面的に捉える

プレテスト第1問(必答問題)の(1)は、コンピュータのグラフ表示ソフトを利用する場面、二次関数の係数の値の変化に伴ってグラフが移動する様子を考察する問題でした。正答率は(1)50.9%、(2)78.5%、(3)44.8%、(4)34.9%、(5)2.0%(記述式)という

結果で、他の問題と比べると高い数値となりました。

公表された問題のねらいには「単に計算によって式や数値を求める問題とならないように工夫」「論理的に推論したり解決過程を振り返ったりしながら、見いだした事柄の根拠を数学的な

表現を用いて説明する力を問う」という記述があります。現行の大学入試センター試験のように定型的に「平方完成して頂点を求めて…」というような流れを見せない形式になっているので、標準的な解き方だけを学習している生徒には、特に(3)(4)は難しかったと思われます。

一方で、 $b^2 - 4ac$ の意味を単に判別式としてだけでなく、「頂点の y 座

標に含まれる式」「 x 軸との交点の x 座標に含まれる式」のように多面的に理解していた生徒にとっては、計算量も少なく、解きやすい出題だったはず

です。特に、「GeoGebra」や「GRAPES」などのグラフ表示ソフトを操作する様子を見たり、実際に操作したりした経験があれば、問題の設定は容易に把握できました。



須田 学
筑波大学附属駒場中・高校教諭

授業の目標

- ①コンピュータによる試行錯誤で論理的に推論し、問題解決することができる。
- ②問題解決の過程を振り返り、数学的な表現を用いて的確に説明することができる。
- ③二次関数のグラフを、2つの関数の和のグラフと捉えて、総合的・発展的に考えることができる。

学習活動

1 問題の理解と GeoGebra の操作方法の確認

2 問題解決と解法の共有

(1) f は、 g を平行移動した放物線で原点で h に接する(1点のみを共有する)。 f と x 軸の交点の x 座標は、 g と h の y 座標の和が 0 になる位置に対応する、などに気付く。

(2) $x = -b/2a$ のグラフを i として表示し、 f と i の共有点を定義することで頂点を表示する。 b の値を変化させて、頂点が $y = -ax^2$ のグラフ上を動くことに気付く。

(3) a の値を変化させて、頂点が $y = bx/2$ のグラフ上を動くことに気付く。

(4) g の方程式は、 $y = a(x - (-b/2a))^2 - a(-b/2a)^2$ 、 $y = a(x - (-b/2a))^2 + (b/2)(-b/2a)$ と書き換えられることから、頂点について、 x 座標が $-b/2a$ のとき、 y 座標が $-a(-b/2a)^2 + (b/2)(-b/2a)$ であることを理由として説明する。

3 まとめ
プレテストの(4)を例に、 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを関数の和を利用して考察できるように気付く。

学習活動を支える教師の役割

・操作できない生徒には個別に対応する。

・2つの関数の和のグラフでは、 x 座標を定めるとき、それぞれのグラフの y 座標の和の位置に点があることを確認させる。

・平方完成だけでなく、 $ax(x - (-b/a)) = 0$ から f と x 軸の交点の x 座標が 0 、 $-b/a$ で、その平均でも軸を決定することも確認させる。必要に応じて、「残像の表示」「再描画」も利用させる。

・ $x = -b/a$ のときの g 、 h の y 座標 y_g 、 y_h は $y_h = -y_g$ を満たし、 $x = -b/2a$ のときの g 、 h の y 座標がそれぞれ $y_g/4$ 、 $y_h/2$ となり、これらの和が $-y_g/4 = (-1)(y_g/4)$ 、 $y_h/4 = (y_h/2)/2$ であることから、関数の和のグラフとしても解釈させる。

・ f を y 軸方向に c だけ平行移動して、 x 軸を直線 $y = c$ に置き換えて同様に考えればよいことを確認させる。

【授業で扱う問題】

動的数学ソフトウエア GeoGebra を操作して、2次関数 $y = ax^2 + bx$ のグラフを考察する。

(1) $y = ax^2 + bx$ 、 $y = ax^2$ 、 $y = bx$ のグラフ(順に f 、 g 、 h とおく)を同じ座標平面上にそれぞれ表示し、 a 、 b の値を変化させて、グラフの位置関係がどのようになるか調べよ。 x 軸との交点にも着目して、できるだけ多くの関係を見つけること。

(2) $y = ax^2 + bx$ のグラフについて、さらに軸 (i とおく) を表示して、このグラフとの交点を定義することにより、頂点を表示せよ。また、 a の値を固定したまま、 b の値だけを変化させて、頂点がどのように動くか調べよ。必要であれば、点における「残像の表示」を利用せよ。ちなみに、不要な残像は、表示メニューの「再描画」で消すことができる。

(3) b の値を固定したまま、 a の値だけを変化させて、頂点がどのように動くか調べよ。

(4) (2)(3)で調べたことについて、GeoGebra を利用して成立することを確認し、その理由を数学的な表現で説明せよ。

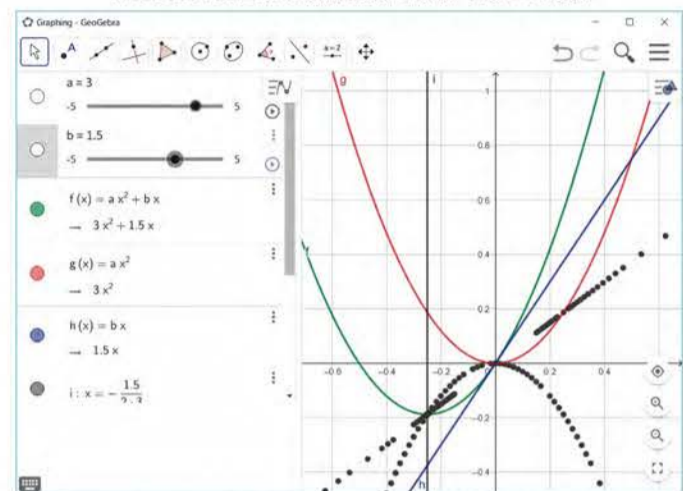
確認→標準的な証明→他の考え方の手順

ここでは、生徒1人で1台のコンピュータ(パソコン、タブレットなど)を利用する環境を想定して授業を計画しました。

グラフ表示ソフトは、さまざまなOSでインストール可能なフリーソフト「GeoGebra」を想定しています。インストールが難しい環境であれば、インターネットに接続

して、ブラウザで「<https://www.geogebra.org/graphing>」にアクセスして利用することもできます。コンピュータの台数に制限があるのであれば、グループワーク形式にしてもよいでしょう。また、生徒用のコンピュータ自体を準備できないのであれば、教師が操作する様子を生徒に見せるだけでも考

「GeoGebra」による試行錯誤で頂点の動きを考察



察を進めることはできません。

扱う題材は、プレテストで考察した二次関数で定数項が 0 であるものです。単純化、関数の和のグラフとしての解釈、GeoGebra による試行錯誤によって、グラフの構造の本質を理解しやすくなります。詳細は左表の「授業の目標」「学習活動」「授業で扱う問題」などを参照してください。

このような二次関数の問題では、平方完成による解法が標準的ですが、代数計算だけで本質を捉えることは簡単ではありません。今回の授業では、証明するだけでなく、GeoGebra を利用して、生徒自身が試行錯誤しながら、関数の和のグラフとして捉えて考察することを主題としています。

まず、 $y = ax^2 + bx$ のグラフ f が、 $y = ax^2$ のグラフ g を平行移動したもので、 $y = bx$ のグラフ h に原点で接する(1点のみを共有する)ことに気付くはずですが、上記画面上のグラフ。これは関数の和のグラフとして捉えれば、微分に頼らなくても、感覚的に理解できるでしょう。また、係数の値を変化させたとき、頂点の大まかな位置も予想できます。

次に、頂点の位置を確定していきます。 f と x 軸の交点の x 座標は、 $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow -ax^2 = bx$ によって求められるので、 g と h の y 座標の和が 0 になる位置としてだけでなく、放物線 $y = -ax^2$ と h が交わる位置として捉えることもできます。実際に GeoGebra で放物線 $y = -ax^2$ を表示すると正しいことが確認できます。

また x 座標の値は 0 と $-b/a$ なので、放物線の対称性から、これらの平均、すなわち $-b/2a$ が f の軸の x 座標の値となり、放物線と軸の交点として頂点が表示できます。「残像の表示」を利用して係数の値を変化させれば、頂点の動きがどのようになるかは容易に予想できるので、「GeoGebra」による確認「標準的な証明」「他の考え方」の順で生徒に考察させていきます。

「他の考え方」では、数学的に面白い発想をしている生徒にクラスの前で説明してもらい、全員で共有します。説明することで本人の考えがまとまり、それを聞いた他の生徒から、さらに新たな発想が生まれることも珍しくありません。

このような授業の実践において、教員には、新たな発想が生まれるような教材とクラスの雰囲気をつくり、生徒の発想をまとめて、他の生徒にも理解させる力が求められます。生徒の説明が分かりにくかったり、不十分であったり、とっぴな発想で誰も理解できなかったりすることもあるからです。

筆者の勤務校の数学科では、授業内容に関係するレポートを生徒が自由に提出してよいという文化があり、授業時間内で収まり切らないような生徒の発想を回収・整理し、扱った教材と共に教科会で共有しています。各学校で教えている生徒に合った良質な教材を開発・共有し、積極的に実践していくことが、今後につながっていくのではないのでしょうか。

2018

第5回

夏の教育セミナー

新学習指導要領と大学入試改革

参加無料

5年目となる
今年は
より実践型へ!

主催：日本教育新聞社 / 株式会社 ナガセ (東進ハイスクール・東進衛星予備校)

セミナー共通プログラム

(予定)
13:00~18:30

プログラムの詳細は、変更の可能性があります。

第1部 13:00 開会

13:20 特別講演 ① 新学習指導要領と大学入試改革の要諦について、教育改革を推進する文科省等の制度設計の担当者・有識者より講演いただきます。

14:30 特別講演 ② 大学入試や授業改革の具体的な変化についての講演。「大学入学共通テスト」のモデル問題・試行調査の解説等を予定しています。

15:30 特別講演 ③ 文部科学省「トビタテ! 留学JAPAN」プログラムより、高校生への留学支援についてご紹介します。

第2部 16:00 分科会 (90分)

新テストで求められる学力へつながる、本質的・先進的な取り組みをされている高校の先生による模擬授業・実践例報告の分科会と、各地域の主要大学によるアドミッション・ポリシーの分科会を実施します。

第3部 17:40 交歓会 (50分)

ご参加の先生同士の情報交換・交流の機会として、積極的にご活用ください。軽食・お飲物をご用意しています。

分科会は教科別の授業実践と大学のアドミッション・ポリシーから選べます!

各教科の授業実践について、実際に高校で指導している先生から、実際の教材や授業の様子をご紹介します。英語、数学、国語の教科別に、授業案やモデル問題解説などを行います。

各地域の主要大学から、幹部や担当者が登壇。「どのような学生を求めているか」や、改革を実現するための大学の取り組みなどをご紹介します。



*東京会場は分科会 16:10~、交歓会 18:00~を予定しています。

>>> プログラム詳細は、順次ホームページにて公開いたします。

●ウェブからゾクゾクお申し込みをいただいています!

夏の教育セミナー kyoiku-sakidori.com

夏の教育セミナー

検索

